METODO DEI POTENZIALI NODALI

È un metodo risolutivo di una rete, più veloce rispetto all'uso diretto delle Leggi di Kirchhoff per cui valgono le seguenti:

LKC, 1ª LK   N Nodi => N - 1 equazioni indipendenti ai nodi

LKT, 2ª LK   L Lati => L - (N - 1) equazioni alle maglie

Le LK ci consentono di scrivere un numero di equazioni pari al numero delle incognite, cioè le tensioni e le correnti.

Con questo metodo è possibile esprimere le tensioni sui rami di una rete attraverso le differenze di potenziali nei nodi a cui questi rami fanno riferimento.

Le incognite sono i potenziali nodali, ad ogni nodo è associata una incognita. Un nodo è preso come potenzilae di riferimento e posto pari a zero.

Le LKT sono automaticamente soddisfatte.

La procedura si sviluppa nel seguente modo:

1) Si identificano le incognite rappresentate dai potenziali nodali, per tutti i nodi escluso uno che è preso come potenziale di riferimento pari a zero. Avremo dunque le incognite V_A, V_B, V_C, ecc.

2) Si esprimono le tensioni sui rami coe differenze di potenziali fra i potenziali nodali e avremo dunque una serie di relazioni del tipo:

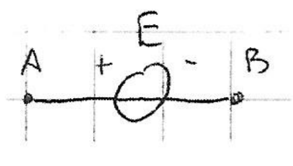
$V_A - V_B = R_1 I_1 = V_1$ (fra A e B c'è un resistore R1)

$V_C - V_B = R_2 I_2 = V_2$ (fra C e B c'è un resistore R2)

$0 - V_B = R_3 I_3 = V_3$ (fra il nodo di riferimento e B c'è un resistore R3)

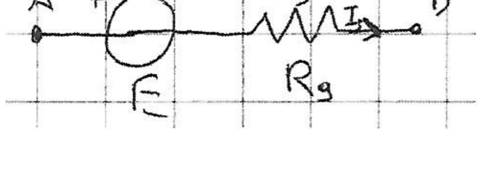
Nel caso della presenza di un generatore di tensione avremo:

$V_A - V_B = E$



oppure, con in serie un resistore, R_9:

$V_A - V_B - E = R_9 I_9 = V_9$



3) Da queste N - 1 equazioni ricaviamo le correnti in funzione delle tensioni ai nodi; avremo dunque:

$I_1 = V_1 / R_1 = (V_A - V_B) / R_1$

$I_2 = V_2 / R_2 = (V_C - V_B) / R_2$

$I_3 = V_3 / R_3 = -V_B / R_3$

$I_9 = V_9 / R_9 = (V_A - V_B - E) / R_9$ => generatore E sul ramo

Le LKT sono automaticamente soddisfatte.

4) Occorre imporre le LKC su tutti i nodi; una LKC sarà scartata in modo del tutto arbitrario, nella pratica con scelta ponderata. quindi avremo una situazione del tipo:

nodo A) $-I_9 - I_1 - I_4 = 0$ => n.b.: tutte correnti uscenti

nodo B) $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ => n.b.: tutte correnti entranti

nodo C) $I_5 + I_6 + I = 0$ => n.b.: I è un generatore di corrente di intensità I

ecc...

5) A questo punto si sostituiscono tutte le correnti I_1, I_2, ecc., con i valori delle correnti nel punto 3 ottenendo un sitema la cui soluzione porta a conoscere i potenziali nodali e da questi tutte le tensioni e tutte le correnti.

METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

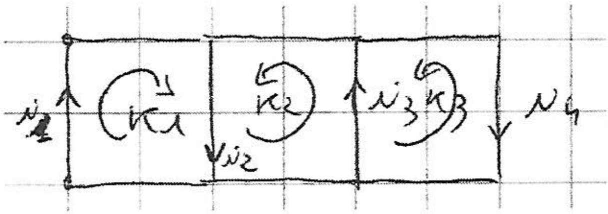
È un metodo risolutivo di una rete, più veloce rispetto all'uso diretto delle Leggi di Kirchhoff per cui valgono le seguenti. Può essere considerato duale del metodo dei potenziali nodali. La metodologia è la seguente:

1) Si applica ad un set di maglie indipendenti supponendo che in ognuna di queste maglie circoli una corrente, con un verso stabilito in modo arbitrario; tale corrente di maglia, ovviamente, è fittizia ed in realtà non esiste. Le correnti di maglia sono variabili ausiliarie.

2) Si esprimono le correnti dei singoli rami in funzione di tali correnti di maglia. Le LKC sono automaticamente soddisfatte.

3) Infine si scrivono le equazioni alle maglie (LKT) la cui risoluzione porta a determinare le correnti di maglia incognite.

Ad esempio:



1) K1, K2, K3 sono le correnti di maglia, alle quali è stato dato un verso arbitrario.

2) Le correnti di lato vengono espresse in funzione delle correnti di maglia nel seguente modo:

$$i_1 = K_1 + K_2$$
$$i_2 = K_1 + K_2$$
$$i_3 = K_2 - K_3$$
$$i_4 = -K_3$$

Le LKC sono automaticamente soddisfatte. A questo punto sostituiamo alle correnti i valori dati dalle caratteristiche del bipolo, ad esempio alla corrente i_1 il valore v_1 / R_1, alla corrente i_2 il valore v_2 / R_2 e così via, ovvero:

$v_1 / R_1 = K_1 \quad => v_1 = K_1 R_1$
$v_2 / R_2 = K_1 + K_2 => v_2 = R_2 (K_1 + K_2)$
$v_3 / R_3 = K_2 - K_3 => v_3 = R_3 (K_2 - K_3)$
$v_4 / R_4 = K_3 \quad => v_4 = K_3 R_4$

3) Si scrivono le LKT e avremo una situazione del tipo:

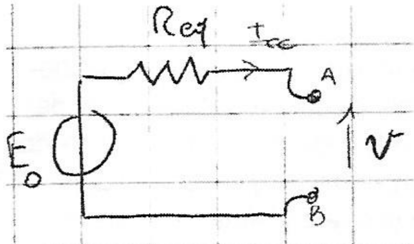
$v_1 + v_2 = E$ per la presenza di un generatore di tensione
$v_2 - v_3 = 0$
ecc...

Nella prima relazione si sostituiscono v_1 e v_2 rispettivamente con $K_1 R_1$ e con $R_2 (K_1 + K_2)$ e nella seconda relazione v_2 e v_3 rispettivamente con $R_2 (K_1 + K_2)$ e $R_3 (K_2 + K_3)$ ecc..., si ottiene un sistema nelle incognite K_1, K_2, ecc..., che porta ad una soluzione data dai valore di K_1, K_2 ecc.

TEOREMA DI THEVENIN CON DIMOSTRAZIONE

Si applica alle reti lineari e consente di determinare un circuito equivalente di una rete in cui sono presenti resistori, generatori di corrente e generatori di tensione.

Il circuito equivalente che si ottiene è un generatore di tensione e una resistenza in serie di opportuni valori.



Vale la relazione

$E_0 = R_{eq} \cdot I_{cc}$

E_0 è la tensione a vuoto vista ai morsetti della rete originaria, cioè la differenza di potenziale fra i due morsetti.

R_{eq} è la resistenza equivalente vista ai morsetti della rete originaria quando essa è stata resa passiva e cioè quando i generatori di tensione sono stati sostituiti con cortocircuiti e i generatori di corrente sono stati sostituiti con circuiti aperti.

Dimostrazione:

Supponendo di conoscere la corrente i ai morsetti A e B, si applica il principio di sostituzione ponendo un generatore di corrente che eroga una corrente i e si determina la tensione v ai capi di A e B tramite sovrapposizione degli effetti.

Tale tensione è ottenuta come somma della tensione v_1 quando agisce solo il generatore di corrente e della tensione v_2 ottenuta facendo agire tutti i generatori indipendenti della rete originale.

Quindi

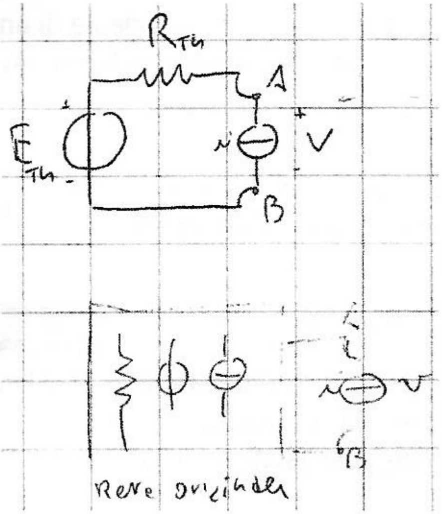
$$v = v_1 + v_2$$

Ma v_1 è la tensione che si trova ai capi del generatore di corrente inserito tramite il principio di sovrapposizione quando tutta la rete (in questo caso priva dei generatori indipendenti) è stata ridotta ad una resistenza equivalente Req e pertanto deve valere la relazione

$$v_1 = - R_{eq}\, i$$

La tensione v_2 corrisponde alla tensione tra i morsetti A e B quando si stacca la parte destra del circuito, essa è cioè la cosiddetta tensione a vuoto V_0.

Imponendo che la rete col generatore di corrente ai morsetti A e B sia equivalente alla rete equivalente di Thevenini abbiamo che la tensione V deve essere uguale alla tensione v del circuito con il generatore di corrente i, cioè deve valere:



$$V = E_{TH} - R_{TH}\, i = v = v_2 + v_1 = V_0 - R_{eq} i$$

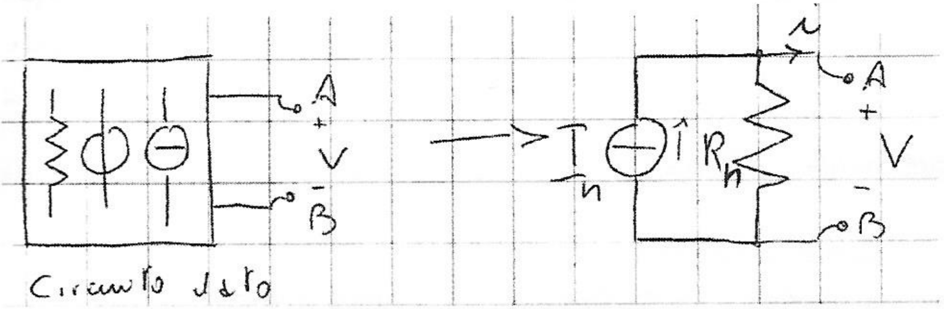
Da questo segue che:

$V = v$ se $E_{TH} = V_0$ e $R_{TH} = R_{eq}$.

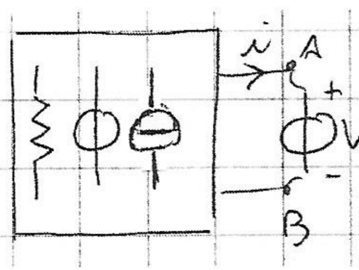
Dunque la resistenza equivalente du thevenin si ottiene come resistenza vista dai morsetti A e B della rete originaria avendo prima disattivato tutti igeneratori indipendenti, cioè tale rete è stata resa passiva. La tensione equivalente di thevenin si ottiene determinando la tensione a vuoto tra i morsetti A e B.

TEOREMA DI NORTON CON DIMOSTRAZIONE

Si applica alle reti lineari e consente di rappresentare in modo equivalente agli effetti esterni un circuito dato sostituendolo con un circuito semplificato formato da un generatore di corrente con in paralello una resistenza, di opportuni valori.



Utilizzando il principio di sostituzione si consideri un generatore di tensione V ai morsetti A e B della rete considerata.



Per applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti si determina la corrente $i = I_1 + I_2$ come somma delle due correnti agenti nei due sottocircuiti in cui nel primo agisce solo il generatore di tensione V mentre tutti i generatori indipendenti del circuito sono disattivati.

La corrente risulta $I_1 = -V / R_{eq}$, dove R_{eq} corrisponde alla resistenza vista ai morsetti A e B con la rete resa passiva.

Nel secondo circuito agiscono invece tutti igeneratori indipendenti del circuito mentre il generatore di tensione V è disattivato. La corrente I2 viene normalmente chiamata corrente di corto circuito in quanto corripsonde alla corrente che circola tra i morsetti A e B cortocircuitati e viene indicata con il simbolo I_{CC}.

L'equivalenza tra il circuito dato e quello di Norton si ottiene se la corrente i risulta uguale alla corrente i_N.

Applicando la LKC al morsetto A si ottiene:

$$i = I_N - V / R_N$$

Imponendo l'uguaglianza tra le correnti:

$$i = I_N - V / R_N = i_N = I_{CC} - V / R_{eq};$$

Quindi nel circuito equivalente di norton il generatore di corrente deve erogare una corrente I_{cc} pari alla corrente di cortocircuito tra i morsetti A e B e la resistenza da porre in parallelo corrisponde alla resistenza equivalente vista dai morsetti A e B con il circuito reso passivo, ovevro con il circuito privo dei generatori indipendenti e quindi i generatori di tensione sostituiti da corto circuito e i geneartori di corente sostituiti da circuiti aperti.

Notare che vale la relazione

$$E_0 = R_{eq} I_{CC}$$

quindi note due grandezze la terza è calcolata.

Inoltre con queste tre grandezze è possibile costruire un circuito di Thevenin ed un circuito di Norton equivalenti tra di loro.

TEOREMA DI TELLEGEN

Il teorema di Tellegen è una proprietà del grafo di una rete che soddisfi le LK.

Ipotesi: sono date due reti con lo stesso grafo, cioè i bipoli sono collegati nella stessa maniera.
Per la prima rete si consideri un sistema di tensioni V_K che soddisfi la LKT. Per la seconda rete si consideri un sistema di correnti I^*_K che soddisfi la LKC.

Tesi: $\sum_K V_K I^*_K = 0$

Dimostrazione:

Si considerino tutti i possibili collegamenti tra i bipoli, con bipoli a vuoto per quelli che in realtà non ci sono. quindi in essi la corrente è nulla. Possiamo esprimere la sommatoria della tesi in termini dei nodi R e S in tale modo:

$$\sum_K V_K I^*_K = 1/2 \sum_{R,S} V_{RS} I^*_{RS}$$

con 1/2 per non considerare due volte un ramo.

Ora, se le V_{RS} soddisfano le LKT allora è possibile metterle sottoforma di differenza di potenziale $V_{RS} = V_R - V_S$.

Si ottiene

$$\sum_{R,S} V_{RS} I^*_{RS} = \sum_{R,S} V_R I^*_{RS} - \sum_{R,S} V_S I^*_{RS}$$

Ora la sommatoria V_R può essere portata fuori dalla sommatoria su S e la sommatoria V_S può essere portata fuori dalla sommatoria su R, ottenendo:

$$\sum_R V_R \cdot \sum_S I^*_{RS} - \sum_S V_S \cdot \sum_R I^*_{RS}$$

Avendo fatto la stessa convenzione su ogni bipolo tutte le sommatorie I^*_{RS} sono nulle e questo dimostra il teorema.

☐

POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE

Con buona approssimazione, in regime sinusoidale vale ancora il Teorema di Tellen per cui, se le tensioni soddisfano le LKT e le correnti soddisfano le LKC, vale:

$$\sum_K v_K(t)\, i_K(t) = 0$$

Tale prodotto rappresenta la potenza assorbita istante per istante dal bipolo.

v è la differenza di potenziale, il lavoro che si deve fare per portare una carica unitaria da un punto all'altro.

i è la quantità di carica che nell'unità di tempo passa.

$p(t) = v(t)\, i(t) = V_M \text{sen}(\omega t)\, I_M \text{sen}(\omega t - \varphi) = p(t)$, **potenza istantanea**, con φ angolo di sfasamento della corrente rispetto a V_M.

$p(t) = V\, I\, [\cos\varphi + \text{sen}(2\omega t - \varphi - \pi/2)]$, somma in cui il termine $V\, I \cos\varphi$ è costante e un termine di frequenza doppia, poiché la pulsazione è diventata 2ω ed è sfasata di $- \varphi - \pi/2$.

Se si fa il valor medio della potenza istantanea si ottiene il valore costante $V\, I \cos\varphi$, e questo valor medio prende il nome di potenza attiva, P.

POTENZA ATTIVA P $= 1/T \int_0^T v(t)\, i(t)\, dt = V\, I \cos\varphi$, ovvero $P = V \bullet I$

con • prodotto scalare.

La potenza attiva (pari al valor medio della potenza istantanea) è quella che fa agire i dispositivi elettrici.

La potenza è la derivata dell'energia, cioè la variazione della energia nella unità di tempo, quindi per calcolare l'energia assorbita dal bipolo (con convenzione dell'utilizzatore) occorre fare l'integrale della potenza.

La potenza media è anche una misura dell'energia che si assorbe, perché basta moltiplicarla per l'intervallo di tempo durante il quale questa potenza viene assorbita, ecco perché il valor medio prende il nome di potenza ttiva, che è quella che fa agire i dispositivi elettrici.

Questo spiega perché abbiamo usato i valori efficaci per rappresentare i fasori (RMS, root mean square).

$V_{eff} = V_{MAX} / 2\text{^}0.5$

Perchè la potenza è il prodotto dei valori efficaci per il cos φ, con φ angolo di sfasamento tra la corrente e la tensione.

POTENZA COMPLESSA

Applicando il Teorema di Tellegen al sistema delle tensioni in forma fasoriale e al sistema dei coniugati delle correnti, che soddisfano anch'essi la prima LK, avendo la parte immaginaria cambiata di segno, abbiamo:

$$\sum_k \bar{V}_k \tilde{\bar{I}}_k = \sum_k \underbrace{V_k e^{j(\omega t + \alpha_k)}}_{\text{FASORE della tensione}} \underbrace{I_k e^{\overset{\text{coniugato}}{-}j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)}}_{\text{FASORE del coniugato della corrente}} = 0$$

Da cui:

$$\sum_k \bar{V}_k \tilde{\bar{I}}_k = \sum_k V_k I_k e^{\varphi_k} = 0$$

E, per la formula di Eulero in forma cartesiana abbiamo la potenza complessa come:

$$\bar{V}_k \tilde{\bar{I}}_k = V_k I_k (\cos \varphi_k + j \operatorname{sen} \varphi_k)$$

e la somma di questi termini è uguale a zero, cioè la parte reale è identicamente nulla e la parte immaginaria è identicamente nulla.

Termine della parte reale (sempre in sommatoria estesa a tutti i rami):

$\sum_K V_K I_K \cos \varphi_K = 0$ => conservazione della potenza attiva, conseguenza della conservazione dell'energia

Notare che $\cos \varphi_K$ è detto fattore di potenza.

Termine della parte immaginaria (sempre in sommatoria):

$\sum_K V_K I_K \operatorname{sen} \varphi_K = 0$ in cui $V_K I_K$ è una potenza, $\operatorname{sen} \varphi_K$ è adimensionale, quindi l'espressione ha una dimensione di una potenza, ma non è la potenza attiva, non è in connessione con l'energia assorbita se non in una maniera strana che poi vedremo. E' detta potenza reattiva che si conserva.

Quindi questo è un nuovo termine che ha diritto ad essere chiamata potenza, da non confondere con quella attiva, per cui è stato definito come potenza reattiva.

Il termne è presente solo se ci sono induttori e condensatori. Se ci sono solo resistori si ha solo una potenza attiva.

Quindi:

Potenza complessa: $\bar{V}_k \tilde{\bar{I}}_k = V_k I_k (\cos \varphi_k + j \operatorname{sen} \varphi_k)$

Potenza reattiva: $Q_k = V_k I_k \operatorname{sen} \varphi_k$

Potenza apparente: Pa = V I

Cioè la potenza apparente è il prodotto dei valori efficaci di V e I senza il fattore di potenza cos φ.

Essa sarebbe la potenza che si avrebbe se, trovandoci in regime continuo, correnti e tensioni fossero uguali ai valori efficaci.

Non si conserva.

POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$ POTENZA ISTANTANEA

per un qualunque bipolo, qualunque espressione di $v(t)$ e $i(t)$.

In regime sinusoidale

$$v(t) = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_V)$$ V_m = Tensione massima

$$i(t) = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_I)$$ I_m = Corrente massima

Si definiscono: I^* = coniugato di I

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\overline{V}\overline{I}^*\} = \frac{1}{2} V_m I_m \operatorname{sen}(\varphi_V - \varphi_I)$$

↳ Per l'uso di V_m, non va messo se si lavora con i valori efficaci

↳ **Potenza attiva** (pari al valor medio della potenza istantanea)

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\{\overline{V}\overline{I}^*\} = \frac{1}{2} V_m I_m \operatorname{sen}(\varphi_V - \varphi_I)$$

↳ Potenza reattiva

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \overline{V}\overline{I}^* = P + jQ$$

↳ Potenza complessa

$$A = |\dot{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

↳ Potenza apparente

POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE

Schema di Apprendimento

CON BUONA APPROSSIMAZIONE IN REGIME SINUSOIDALE VALE ANCORA IL TEOREMA DI TELLEGEN PERCUI, SE LE TENSIONI SODDISFANO LE LKT E LE CORRENTI LE LKC VALE LA SEGUENTE

$$\sum_k v_k(t)\, i_k(t) = 0$$

QUESTO RAPPRESENTA LA POTENZA ASSORBITA ISTANTE PER ISTANTE DAL BIPOLO

Potenza istantanea | $p(t) = v(t)\, i(t)$

$$v(t) = V_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_V)$$
$$i(t) = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_I)$$

VALORI MASSIMI

VALOR MEDIO DELLA POTENZA ISTANTANEA

$\Downarrow$

POTENZA ATTIVA P

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t) = \bar{V}\,\underline{I}\cos\varphi = \bar{V}\cdot\underline{I}$$

$$P = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\bar{V}\bar{I}^*\}$$

.. / ..

POTENZA COMPLESSA

APPLICANDO IL TEOREMA DI TELLEGEN AL SISTEMA DELLE TENSIONI IN FORMA FASORIALE E AL SISTEMA DEI CONIUGATI DELLE CORRENTI (CHE SODDISFANO ANCH'ESSI la 1ª LK), AVENDO LA PARTE IMMAGINARIA CAMBIATA DI SEGNO, OTTENIAMO LA RELAZIONE

$$\bar{V}_k \bar{I}_k^* = V_k I_k (\cos \varphi_k + j \operatorname{sen} \varphi_k)$$

Abbiamo una parte reale e una parte immaginaria.
La parte reale è equivalente alla potenza attiva P, quella immaginaria ha una dimensione di una potenza ed è detta potenza reattiva Q.

POTENZA COMPLESSA $\bar{P} = P + jQ$

LA POTENZA REATTIVA È PRESENTE SOLO SE CI SONO CONDENSATORI E INDUTTORI; SOLO RESISTORI COMPORTANO UNA POTENZA SOLO ATTIVA.

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \bar{V} \bar{I}^* \right\} \quad \text{POTENZA ATTIVA}$$

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left\{ \bar{V} \bar{I}^* \right\} \quad \text{POTENZA REATTIVA}$$

($\frac{1}{2}$ perché si usano i valori massimi)

P e Q SI CONSERVANO ($\Sigma = 0$)

POTENZA APPARENTE

E' LA POTENZA CHE SI AVREBBE SE, TROVANDOCI IN REGIME CONTINUO, CORRENTI E TENSIONI FOSSERO UGUALI AI LORO VALORI EFFICACI.

NON SI CONSERVA

$$P_A = VI$$

$$P_A = |\dot{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Il fenomeno della RISONANZA

La risonanza è un fenomeno che si verifica nei circuiti elettrici quando vi sono elementi attivi (induttore e condensatore) secondo opportune condizioni, legate alla pulsazione, quindi in regime sinusoidale.

La condizione di risonanza si ha quando $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Sotto queste condizioni $\dot{Z}_L = -\dot{Z}_C$

Se il condensatore e l'induttore sono in parallelo allora siamo in presenza di una risonanza parallelo e il parallelo equivale a un circuito aperto: nel circuito, in risonanza, non passa corrente, ma questo non vuol dire che le correnti sono nulle.

Se il condensatore e l'induttore sono in serie, allora siamo in presenza di una risonanza serie e la serie equivale ad un cortocircuito: la tensione ai capi dell'induttore e del condensatore in serie è nulla, ma questo non vuol dire che le tensioni siano nulle singolarmente

Appendice all'argomento risonanza

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ è la condizione di risonanza

$\frac{d^2x(t)}{dt} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dx}$ pulsazione

Se l'equazione differenziale del secondo ordine ha:

- due radici reali e distinte
  allora nel circuito si ha uno
  smorzamento forte, circuito sovrasmorzato;
  $\alpha > \omega_0$ (α costante di smorzamento)
- due radici reali e coincidenti
  allora si ha uno smorzamento critico
  $\alpha = \omega_0$
- Due radici complesse coniugate
  allora si ha uno smorzamento debole
  e il circuito si dice sottosmorzato
  (smorzato debolmente).
  $\alpha < \omega_0$

La CONTINUITÀ DELLE VARIABILI DI STATO

le variabili di stato sono v_C, tensione sul condensatore e i_L, corrente nell'interruttore.

Esse rappresentano ~~sono~~ un livello energetico che, nell'istante iniziale di un transitorio sono le condizioni iniziali.

La variabile di stato deve essere continua, altrimenti, nell'istante iniziale avremmo il paradosso che in un intervallo di tempo nullo l'energia, ad esempio del condensatore, è passata ad un valore diverso. Questo significherebbe che il condensatore ha guadagnato una energia finita in un intervallo nullo, oppure ha perso una energia finita e in questo caso avremmo una dissipazione in un tempo nullo per cui il dissipatore deve avere potenza infinita. Questa considerazione porta ad una realtà che non esiste. Ovviamente un discorso analogo può essere fatto per la corrente nell'induttore, che anch'essa non può avere discontinuità.

$$v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

i_L variabile di stato, $i_L(t)$ è funzione continua

$$i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt}$$

v_C variabile di stato, $v_C(t)$ è funzione continua

I SISTEMI TRIFASI

Sono sistemi in cui vengono generate 3 tensioni (f.e.m.) spostate tra di loro di un certo angolo dalla rotazione in campo magnetico di un gruppo di 3 spire, 3 avvolgimenti spaziati di un certo angolo
Le tensioni sono sinusoidali nel tempo

$$\left.\begin{aligned} e_1(t) &= \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ e_2(t) &= \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3(t) &= \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \text{ spostate di } \frac{2}{3}\pi \text{ ovvero } 120°$$

Se le tre tensioni sono uguali in modulo (o valore efficace) e spostate tra di loro di uno stesso angolo il sistema si dirà simmetrico;
nel caso contrario si dirà dissimmetrico
Quindi
Sistema simmetrico o dissimmetrico => tensioni spostate di uno stesso angolo o tensioni non spostate di uno stesso angolo

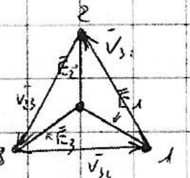
Un generatore trifase si può immaginare realizzato con tre generatori monofase e tale disposizione si dice a stella

Le tensioni tra i conduttori di linea prendono il nome di tensioni concatenate (V_{es}), le tensioni tra i conduttori di linea ed il punto comune dei tre generatori (centro stella) prendono il nome di tensioni stellate o di fase (E_c)

TENSIONI CONCATENATE fra i conduttori di linea (V_{ss})

TENSIONI STELLATE (O DI FASE) fra i conduttori e il centro stella, punto comune dei tre generatori (E_c)

$$\underbrace{\bar V_{12}}_{} = \bar E_1 - \bar E_2$$
$$\bar V_{23} = \bar E_2 - \bar E_3$$
$$\underbrace{\bar V_{31}}_{\text{Tensioni concatenate}} = \bar E_3 - \bar E_1$$



Il triangolo delle tensioni concatenate, V_{ss}, ha per vertici i tre punti 1, 2 e 3, estremi dei vettori che rappresentano le rispettive tensioni stellate, o di fase (E_c)

Collegando i tre generatori a tre impedenze di carico, supponendo il sistema simmetrico (tensioni uguali in modulo e sfasate dello stesso angolo) e supponendo le tre impedenze uguali tra loro, avremo un sistema equilibrato nel carico (o nelle correnti), inoltre varrà per la LKC al nodo comune delle tre impedenze, punto O'

$\bar I_1 + \bar I_2 + \bar I_3 = \bar I_0 = 0$, quindi I_0, il neutro, può essere eliminato.

I due punti O (centro stella dei generatori) e O' (centro stella del carico) sono allo stesso potenziale anche se non collegati da un conduttore.

LA POTENZA nei SISTEMI TRIFASI

da De Menna pag 215

Il potenziale O' del centro stella del carico coincide con il potenziale del baricentro O del triangolo delle tensioni concatenate.
Le correnti nelle singole impedenze sono quindi

$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z}$, $\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{Z}$, $\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{Z}$

La potenza fornita dal sistema dei generatori è

$$p(t) = e_1(t) \cdot i_1(t) + e_2(t) \cdot i_2(t) + e_3(t) \cdot i_3(t)$$

Se la terna delle V è simmetrica e la terna delle E è simmetrica, con il carico equilibrato, la $p(t)$ è una espressione in cui si riconosce un termine costante ($3EI\cos\varphi$) e un termine fluttuante (EI [... che ha periodo 2ω]), in cui il termine fluttuante è nullo.
Quindi, nel caso di terna delle tensioni simmetrica e terna delle correnti equilibrata, la sola potenza che si trasferisce al carico è quella media

$$3EI\cos\varphi = \sqrt{3}\,VI\cos\varphi$$

perché un trifase è meglio di un monofase? ← PERCHÉ UN SISTEMA TRIFASE È MEGLIO DI UN SISTEMA MONOFASE

Un sistema monofase equivalente a un sistema trifase deve fornire la stessa potenza sotto la stessa tensione e con lo stesso fattore di potenza. Confrontando le correnti nel sistema monofase (I_{1f}) deve essere $\sqrt{3}$ volte quella del sistema trifase (I_{3f}).
Inoltre il volume del conduttore usato in un sistema trifase (Vol_{3f}) è 3/4 quello di un sistema monofase (Vol_{1f}) date le suddette condizioni.

$I_{1f} = \sqrt{3} I_{3f}$
$Vol_{3f} = \frac{3}{4} Vol_{1f}$

.../...

Abbiamo cioè

$I_{1f} = \sqrt{3}\, I_{3f}$ (corrente maggiore nel sistema monofase)

$Vol_{3f} = \frac{3}{4} Vol_{1f}$ (volume minore del conduttore in un sistema trifase)

CARICO SQUILIBRATO in un SISTEMA TRIFASE

Supponendo la terna delle tensioni concatenate simmetrica ma le impedenze non più uguali tra loro (carico squilibrato), il potenziale del centro stella dei generatori non coincide più con il potenziale del centro stella del carico, il punto O nella rappresentazione vettoriale non coincide più con il punto O'.
Il vettore $\overline{V}_{O'O}$ è definito come il vettore della differenza di potenziale tra il centro stella del carico e quello dei generatori.
Tale vettore, $\overline{V}_{O'O}$, individua il cosiddetto spostamento del centro stella.
La sua conoscenza consente il calcolo delle tensioni che insistono sui relativi carichi e, di conseguenza, le correnti

$$\overline{I}_r = \frac{\overline{E}'_r}{\dot{Z}_r} = \frac{\overline{E}_r - \overline{V}_{O'O}}{\dot{Z}_r}$$

~~Tale~~ Il calcolo dello spostamento del centro stella è molto facile applicando il metodo dei potenziali ai nodi, scrivendo l'equazione che esprime la LKC ad uno dei due nodi presenti nella rete:

$$\sum_r \frac{\overline{E}_r - \overline{V}_{O'O}}{\dot{Z}_r} = 0$$ da cui, ricavando $\overline{V}_{O'O}$,

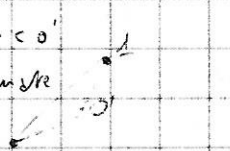
otteniamo:

$$\overline{V}_{O'O} = \frac{\sum_r \frac{\overline{E}_r}{\overline{Z}_r}}{\sum_r \frac{1}{\overline{Z}_r}}$$ che è detta formula di Millmann.

Con tale formula si calcola lo spostamento del centro stella (per carichi squilibrati) se sono noti i valori delle tensioni dei generatori ($\overline{E}$) e delle impedenze di carico ($\overline{Z}$).

Questo procedimento si applica anche al caso di una **terna dissimetrica**.

In questo caso il punto O, rappresentativo del potenziale del centro stella dei generatori $\overline{E}$ (non simmetrici), non sarà più il baricentro del triangolo equilatero delle tensioni concatenate, come nel caso precedente, ma un punto qualsiasi del piano rappresentativo. Esso dipende dalla scelta fatta per la terna di tensioni stellate che si suppone producano le assegnate tensioni concatenate. Per esempio è possibile scegliere O coincidente con uno dei vertici del triangolo delle tensioni concatenate; ciò equivale a supporre che la terna di tensioni concatenate sia prodotta da due soli generatori, come a lato



dove si è supposto O coincidente col vertice 2 del triangolo delle tensioni concatenate. In tal caso lo spostamento del centro stella è dato da

$$\overline{V}_{O'O} = \frac{\frac{\overline{V}_{12}}{\overline{Z}_1} + \frac{\overline{V}_{32}}{\overline{Z}_3}}{\sum_r \frac{1}{\overline{Z}_r}}$$, che dimostra come il metodo dello spostamento del centro stella sia un metodo generale.

SI OSSERVA INFINE CHE NON C'È PROBLEMA IL CALCOLO DELLE CORRENTI IN CIASCUN LATO DI UN CARICO DISPOSTO A TRIANGOLO. IN TAL CASO INFATTI SONO NOTE DIRETTAMENTE LE TENSIONI SULLE SINGOLE IMPEDENZE, SIA NEL CASO DI UNA TERNA SIMMETRICA MA ANCHE IN QUELLO DI UNA TERNA DISSIMETRICA

LA MISURA DELLA POTENZA nei SISTEMI TRIFASI

Inserendo tre wattmetri in un sistema trifase con il neutro raggiungibile possiamo misurare la potenza assorbita dal carico: sulla voltmetrica di ogni ~~amperometro~~ wattmetro è applicata una tensione E_r', poiché O' è stato collegato con un conduttore rispetto al centro stella del carico.

Ogni wattmetro misura una potenza pari a $E_r I_r \cos \varphi_r$.
Quindi $w_1 + w_2 + w_3$ è la potenza assorbita dal carico.
Se però il centro stella del carico non è raggiungibile possiamo procedere come segue.
O' è il centro stella (non raggiungibile del carico).
O'' è il punto comune delle tre voltmetriche dei wattmetri.
Siano $\bar{E}_r'$ le tensioni stellate nel carico, siano $\bar{E}_r''$ le corrispondenti tensioni alle voltmetriche dei wattmetri.
Allora abbiamo

$$\bar{E}_r'' = \bar{E}_r' - \bar{V}_{O'O''}$$

e da questo discende il teorema di Aron.
Ma la somma delle indicazioni dei wattmetri è per definizione:

$$w_1 + w_2 + w_3 = \sum_r \bar{E}_r'' \overset{\text{scalare}}{\cdot} \bar{I}_r \text{, da cui}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = \sum_r \bar{E}_r' \cdot \bar{I}_r - \bar{V}_{O'O''} \sum_r \bar{I} = \sum_r \bar{E}_r' \bar{I}_r,$$

dato che la somma dei fasori delle tre correnti è nulla per l'assenza del neutro. Si conclude dunque (Teorema di Aron) che la somma algebrica

delle indicazioni dei tre voltmetri è indipendente dal potenziale del punto rispetto al quale si valutano le tensioni stellate ed è uguale alla potenza attiva assorbita dal carico.
Non c'è nessuna ipotesi sulle tensioni che alimentano il carico (quindi il sistema può essere simmetrico o dissimmetrico) né sulla natura del carico stesso, che può essere equilibrato o non equilibrato. il risultato è generale.

In questo modo è possibile effettuare la misurazione con due soli wattmetri ponendo O'' ad esempio, in collegamento con il secondo conduttore di linea, l'indicazione del secondo wattmetro è identicamente nulla, perché nulla è la tensione ai suoi morsetti voltmetrici; ciò rende inutile la presenza del terzo wattmetro.

Si arriva dunque a una inserzione detta di Aron, in cui la somma algebrica delle indicazioni, anche negative, dei due wattmetri fornisce la potenza attiva assorbita dal carico.

[da Lezione 33]

MISURAZIONE DELLA POTENZA

La particolare struttura del sistema trifase consente consente di misurare la potenza che attraversa una linea trifase in una certa sezione utilizzando solo due wattmetri e non tre. Questa inserzione, detta di Aaron, dipende dalla indipendenza della potenza dal centro stella (risultato del teorema di Aaron).

[da Lezione 32]

LA POTENZA ISTANTANEA NEI SISTEMI TRIFASI

La potenza istantanea nei sistemi trifase o la potenza che attraversa una determinata sezione della linea trifase è:

$$p(t) = e_1(t)\, i_1(t) + e_2(t)\, i_2(t) + e_3(t)\, i_3(t)$$

E' la somma delle potenze erogate dai singoli generatori, è la potenza istantanea erogata dal sistema trifase o trasportata dal sistema trifase.

Supponendo i conduttori perfetti, la potenza che fornisce il generatore si trasmette lungo la linea.

Se il sistema è simmetrico nelle tensioni ed è equilibrato nel carico la potenza erogata (trasportata) dal sistema, istantanea, si riduce al suo valor medio; la potenza fluttuante è nulla e il valor medio è proprio $3\,E\,I\cos\varphi$.

$$p(t) = e_1(t)\, i_1(t) + e_2(t)\, i_2(t) + e_3(t)\, i_3(t)$$

$$p(t) = EI\left[\operatorname{sen}\omega t\,\operatorname{sen}(\omega t-\varphi) + \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) + \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right)\right] = 3EI\cos\varphi +$$

$$+ \underbrace{EI\left[\cos(2\omega t-\varphi) + \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right]}_{\text{potenza fluttuante}}.$$

doppia pulsazione

- **La potenza istantanea è uguale alla potenza media**
- **La potenza media è pari a $3EI\cos\varphi$ o $\sqrt{3}VI\cos\varphi$.**

IL RIFASAMENTO

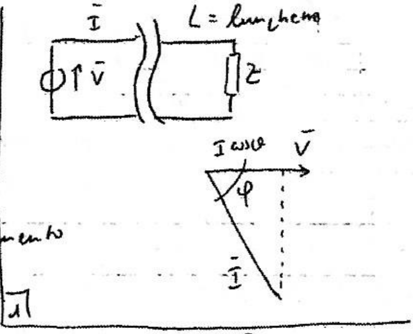
(26.2)

Procedimento che ha scopo di aumentare il fattore di potenza $\cos\varphi$ di un dato carico allo scopo di ridurre a pari potenza attiva assorbita il valore della corrente che circola nell'impianto.

Lunghe linee di trasmissione dell'energia elettrica, che collegano i luoghi della generazione con quelli della utilizzazione, comportano una dissipazione in linea dovuta alla resistenza dei conduttori.

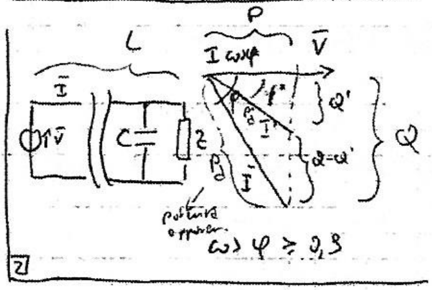
SI RIDUCE L'ASSORBIMENTO DI POTENZA REATTIVA, DIMINUENDO LE PERDITE DI ENERGIA, INSERENDO UNA BATTERIA DI CONDENSATORI IN PARALLELO AL CARICO.

Consideriamo un carico che sotto una determinata tensione V, assorbe una potenza attiva P e una potenza reattiva Q. Il φ ottenuto è minore di quello iniziale. Supponiamo che la fase della impedenza equivalente del carico, $\varphi = \arctan(Q/P)$ sia positiva (carico induttivo).



In figura 2 è rappresentata una diversa condizione di funzionamento in cui la stessa potenza attiva P è assorbita dal carico Z con una differente potenza reattiva Q'.

P = potenza attiva, fase φ = angolo di sfasamento, potenza reattiva Q e potenza apparente P_a, l'ipotenusa.



Con una nuova condizione, con un angolo di sfasamento φ', per cui si vuole RIFASARE da φ a φ', la potenza apparente è P_a', la potenza reattiva è Q'.

P e P' potenze attive
Q e Q' potenze reattive
P_a e P_a' potenze apparenti
φ e φ' angoli di sfasamento

Se si vuole rifasare il carico da φ a φ' dobbiamo assorbire una potenza reattiva che è pari alla differenza tra Q e Q', $Q-Q'$.

Quindi la potenza reattiva che deve essere assorbita dal condensatore è data da $Q-Q'$, col segno meno perché assorbita e pari, tenendo conto dei triangoli, a $-P(tg\varphi - tg\varphi')$:

$$Q_C = -(Q-Q') = -P(tg\varphi - tg\varphi')$$
↳ potenza reattiva

Un condensatore sottoposto alla tensione V assorbe una potenza reattiva $-\frac{V^2}{X_C}$, cioè $-\omega C V^2$, perché $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$Q_C = -\frac{V^2}{X_C} = -\omega C V^2$, eguagliando otteniamo subito:

$$C = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{\omega V^2}$$
, che è la capacità C necessaria per ottenere il rifasamento dall'angolo φ all'angolo φ'.

Questi sono i semplici elementi per ottenere una capacità da disporre in parallelo al carico per ottenere il voluto rifasamento.

Il rifasamento si pone non tanto sui carichi monofase ma trifase.

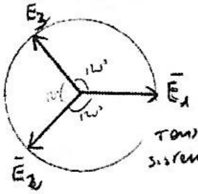
Ci si chiede come mai non venga chiesto un $\cos\varphi = 1$:

1. diminuendo φ, il valore efficace della corrente (il vantaggio) diventa sempre meno rilevante.
2. quando un carico ha un certo $\cos\varphi$ si intende dire che esso è il $\cos\varphi$ del carico medio. Se rifasassimo a $\cos\varphi = 1$, cioè $\varphi = 0$, con un condensatore sufficiente, in alcune condizioni istantanee φ potrebbe essere un angolo di anticipo rispetto alla tensione, cosa che si vuole evitare perché non è conveniente avere in rete carichi capacitivi che in presenza di carichi induttivi possono creare problemi di risonanza.

16'30"

CARICO TRIFASE EQUILIBRATO E SQUILIBRATO.

Un sistema trifase è un sistema con tre tensioni.
Esso è simmetrico quando i vettori che rappresentano le tre tensioni sono uguali in modulo e sfasati dello stesso angolo ($120°$, $\frac{2}{3}\pi$ rad).
Vettorialmente abbiamo una rappresentazione del tipo



Tensioni del sistema trifase

Il carico, in un sistema generatore trifase, è dato da una terna di impedenze.

Il carico è equilibrato se le impedenze sono uguali

Il carico è squilibrato se le impedenze sono diverse.

da: Analisi dei sistemi trifase .pdf

Un carico trifase può essere rappresentato mediante terne di bipoli collegati a stella o a triangolo.
Nel carico a stella le tensioni di fase ai morsetti di ciascun bipolo coincidono con le tensioni stellate, mentre le correnti di fase coincidono con le correnti di linea.
Nel carico a triangolo, le tensioni di fase coincidono con le tensioni concatenate, mentre le correnti di fase non coincidono con le correnti di linea

Un carico trifase a stella o a triangolo si dice equilibrato se le impedenze delle fasi sono uguali tra loro.
Le correnti di fase coincidono con le correnti di linea.
La corrente nel filo neutro è nulla, e le tre correnti di fase costituiscono un sistema trifase simmetrico, della stessa sequenza delle tensioni. Il sistema che ne consegue prende il nome di SISTEMA TRIFASE SIMMETRICO e EQUILIBRATO.
L'aggettivo simmetrico si riferisce alle tensioni, mentre equilibrato si riferisce alle correnti.
Nel diagramma fasoriale, l'angolo di sfasamento tra la terna delle tensioni stellate e la terna delle correnti di linea è pari all'argomento φ dell'impedenza.
Le correnti di linea hanno valore efficace pari a $\sqrt{3}$ volte il valore efficace delle correnti stellate.

SISTEMI TRIFASE SIMMETRICI SQUILIBRATI

In un tale sistema si verifica uno spostamento del centro stella del carico rispetto al centro stella del generatore.
Tale centro stella può essere trovato calcolando il fasore spostamento del centro stella, il metodo dello spostamento del centro stella.

[da riepilogo lezione 33]

I SISTEMI TRIFASICI SQUILIBRATI

Con il metodo dello spostamento del centro stella, un sistema trifase squilibrato si risolve con grande semplicità applicando la formula di Millman che consente di calcolare lo spostamento del centro stella del carico rispetto a qualsiasi ipotizzato centro stella dei generatori, che può essere la terna simmetrica, il baricentro del triangolo delle tensioni concatenate, ma può essere un qualsiasi punto, anche il punto rappresentativo del potenziale di uno dei conduttori di linea.

Noto lo spostamento del centro stella si può calcolare direttamente per sottrazione la tensione sul carico, direttamente sul carico e quindi, dividendo per l'impedenza si ha la corrente che circola nella singola linea.

Questo è vero anche se il sistema della terna di tensioni concatenate non è simmetrico.